Etude d'endomorphismes opérant sur les polynômes

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble de nombres réels.
$\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Si P est un polynôme, on notera P' son polynôme dérivé.
Si P est un polynôme, on notera également sa fonction polynomiale associée.

Partie I – Etudes d'endomorphismes donnés par leur matrice

1. Soit u et v deux réels. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ ayant pour matrice sur la base canonique $(1, X, X^2)$ la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -u & v & 0 \\ -2 & 0 & 2v \\ 0 & -1 & u \end{pmatrix}.$$

1.a Calculer le déterminant de f en justifiant votre réponse.

1.b Déterminer une base du noyau de f.

1.c Déterminer une base de l'image de f.

2. Soit w un réel. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ ayant pour matrice sur la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ la matrice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} -3 & w & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2w & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3w \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.a Calculer le déterminant de g en justifiant votre réponse.
On notera w_0 la valeur qui annule ce déterminant.

2.b Déterminant, lorsque $w = w_0$, une base du noyau de g.

Partie II – Définition d'un endomorphisme, cas particuliers

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, Q un polynôme de degré 2 et φ l'application linéaire définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P) = 2P'Q - nPQ'$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit u et v deux réels. On suppose dans cette question $n = 2$ et $Q = X^2 + uX + v$.

2.a Déterminer la matrice de φ sur la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

2.b Déterminer le noyau de φ en fonction de Q.

3. Soit ω un réel. On suppose dans cette question que $n = 3$ et que $Q = X^2 + 2X + w$.

3.a Déterminer la matrice de φ sur la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

3.b Déterminer suivant les valeurs de w, le noyau de φ.

Partie III – Etude générale de l'endomorphisme précédent

1. On suppose que Q n'admet pas de racine double.

1.a Que peut-on dire du PGCD de Q et Q'.

1.b Déduire de la question précédente que si P est un polynôme non nul appartenant au noyau de φ alors Q divise P.

1.c Montrer que su P est un polynôme non appartenant au noyau de φ, il existe un entier k non nul et un polynôme R non nul, tels que $P = RQ^k$ et tels que Q ne divise pas R.

1.d Déduire de la question précédent que si le noyau de φ n'est pas réduit au polynôme nul alors n est pair.

1.e Déterminer suivant les valeurs de n, le noyau de φ.

2. On suppose que Q possède une racine double α.

2.a Montrer que si P est un polynôme non nul appartenant au noyau de φ alors α est racine de P.

2.b Donner le noyau de φ.
(on pourra utiliser l'ordre de multiplicité de la racine α).

3. Dans cette question, on suppose n impair.
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Montrer qu'il existe un polynôme R de $\mathbb{R}_n[X]$ unique tel que : $P = (X^2+1)R' - nXR$.
Justifier que l'application $\psi : P \mapsto R$ ainsi définie est linéaire.